Über die Gruppencharaktere gewisser unendlichen Gruppen.

Von ALFRED HAAR in Szeged.

Einleitung.

In einer Arbeit, die vor kurzem in der *Mathematischen Zeitschrift* erschienen ist,[1]) habe ich die Theorie der Gruppencharaktere im Falle einer aus abzählbar vielen Elementen bestehenden kommutativen unendlichen Gruppe entwickelt. Es gelang in diesem Falle den Elementen der unendlichen Gruppe Funktionen zuzuordnen, deren Gesamtheit alle wesentlichen Eigenschaften der Gruppencharaktere von endlichen ABELschen Gruppen besitzt und daher als sinngemäße Übertragung dieser Begriffsbildung anzusehen ist. Diese Untersuchung legt den Gedanken nahe, für *nichtkommutative, aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehende Gruppen das Analogon der* FROBENIUS*schen Gruppencharaktere aufzustellen.* Dies gelingt in der Tat *für solche unendliche Gruppen, welche so beschaffen sind, daß jede Klasse von konjugierten Elementen nur aus endlich vielen Elementen besteht,* d. h., daß zu jedem Gruppenelement nur endlich viele konjugierte Elemente existieren. Es ist das Ziel der vorliegenden Note, im Falle solcher unendlichen Gruppen (die ja den kommutativen am nächsten verwandt sind) jedem Gruppenelement bzw. jeder Klasse eine Funktion so zuzuordnen, daß die Gesamtheit dieser Funktionen in ähnlicher Weise mit der Gruppe zusammenhängt, wie es in der FROBENIUSschen Theorie der Gruppencharaktere von endlichen Gruppen der Fall ist.

---

[1]) Über unendliche kommutative Gruppen, *Mathematische Zeitschrift*, **33** (1931), S. 129—159.

Um dies darzulegen, habe ich mir erlaubt, im § 1. dieser Arbeit eine — wie mir scheint neue — durchaus elementare Begründung der Gruppencharaktere von endlichen Gruppen vorauszuschicken, indem ich die FROBENIUSsche Theorie in solcher Weise begründe, die eine Übertragung auf unendliche Gruppen der genannten Art gestattet. Die schöne und äußerst elegante Begründung von I. SCHUR,[2]) die an Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt, benutzt als Ausgangspunkt den Begriff der irreduziblen Darstellungen der Gruppe, einen Begriff, der auf den vorliegenden Fall kaum übertragbar ist, und es ist vielleicht die Loslösung der Gruppencharaktere von den Darstellungen (wie es ja bei FROBENIUS selbst der Fall ist) nicht ohne Interesse. Ich entwickle mit der erwähnten elementaren Beweisanordnung im § 1. die FROBENIUSsche Theorie der Gruppencharaktere nur soweit, daß die volle Analogie der im § 2. angegebenen Gruppencharaktere von unendlichen Gruppen klar hervortritt, obwohl es unschwer wäre, mit Hilfe des MASCHKEschen Satzes auf Grund der bewiesenen Sätze auch den Zusammenhang mit der Darstellungstheorie zu entwickeln. § 2. enthält die Untersuchungen über die angegebenen unendlichen Gruppen; die sinngemäße Übertragung des im vorangehenden §-en eingeschlagenen Weges führt zu einem Funktionensystem, das als Übertragung der Gruppencharaktere für solche Gruppen anzusehen ist (vgl. den Satz am Ende dieser Arbeit).

§ 1. Über Gruppencharaktere von endlichen Gruppen.

1. Die Elemente der vorgelegten Gruppe n-ter Ordnung bezeichnen wir mit $A, B, C, \ldots$; E sei das Einheitselement. Wir bezeichnen ferner mit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_h$ die einzelnen Klassen konjugierter Elemente. $\mathfrak{C}_p$ enthalte n_p Elemente der Gruppe ($n_1 + n_2 + \ldots + n_h = n$), und es sei stets $\mathfrak{C}_1$ diejenige Klasse (Einheitsklasse), die aus dem einzigen Element E besteht ($n_1 = 1$). Die zu $\mathfrak{C}_p$ inverse Klasse (d. h. die Klasse, welche aus den Inversen der zu $\mathfrak{C}_p$ gehörenden Elemente besteht) bezeichnen wir gelegentlich auch mit $\mathfrak{C}_{p'}$; es ist $n_p = n_{p'}$.

Das *Gesetz der Klassenkomposition* ist bekanntlich eine Folge der einfachen Tatsache, daß die beiden Komplexe $X\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_p X$

[2]) Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, *Sitzungsberichte der preußischen Akademie*, 1905, S. 406–432.

übereinstimmen, wobei X ein beliebiges Gruppenelement bezeichnet ($p=1, 2, \ldots, n$). Daraus folgt unmittelbar, daß der Komplex $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$, gebildet aus den Produkten von allen Elementen von $\mathfrak{C}_\alpha$ in alle Elemente von $\mathfrak{C}_\beta$, mit dem Komplex $\mathfrak{C}_\beta\mathfrak{C}_\alpha$ übereinstimmt. Man denkt sich dabei jedes Element von $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta=\mathfrak{C}_\beta\mathfrak{C}_\alpha$ so oft angeschrieben, wie oft es bei der angedeuteten Komposition auftritt, und zeigt, daß falls ein Gruppenelement A k-mal in $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$ vorkommt, jedes zu A konjugierte Element ebenfalls k-mal in diesem Komplex auftreten muß. Man drückt diese Tatsache durch die folgende symbolische Gleichung (der Klassenkomposition) aus:

$$(1)\qquad \mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta=\mathfrak{C}_\beta\mathfrak{C}_\alpha=\sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}\,\mathfrak{C}_\gamma, \qquad (\alpha, \beta=1, 2, \ldots, h)$$

wobei die natürlichen Zahlen $c_{\alpha\beta\gamma}$ angeben, wie oft ein Element von $\mathfrak{C}_\gamma$ im Komplex $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$ auftritt. Sind $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ inverse Klassen ($\beta=\alpha'$), so ist offenbar $c_{\alpha\beta 1}=n_\alpha=n_\beta$, im entgegengesetzten Falle ist $c_{\alpha\beta 1}=0$.

Man erhält die sogenannte *reguläre Darstellung* der vorgelegten Gruppe, wenn man diese in wohlbekannter Weise durch die Permutationsgruppe

$$\begin{pmatrix} A, & B, & C, \ldots \\ AX, & BX, & CX, \ldots \end{pmatrix} \quad (X \text{ beliebiges Gruppenelement})$$

darstellt und sodann zu den entsprechenden linearen Transformationen bzw. Matrizen übergeht. Auf diese Weise wird dem Gruppenelement X eine Matrix n-ter Ordnung $(X)=(a_{P,Q}^{(X)})$ zugeordnet, wo die Indizes P und Q alle Elemente der Gruppe durchlaufen. Man findet ohne Mühe

$$a_{P,Q}^{(X)}=\delta_{PX,Q},$$

wobei in üblicher Weise $\delta_{P,Q}$ Null oder Eins bedeutet, je nachdem $P\neq Q$ oder $P=Q$ ist. Die Formel $(XY)=(X)(Y)$ kann man übrigens leicht durch Rechnung verifizieren, und man erkennt auch unmittelbar, daß dem Einheitselement E die Einheitsmatrix (E), inversen Elementen natürlich inverse Matrizen entsprechen. Da aber alle hier auftretenden Matrizen (X) reell und orthogonal sind, so ruft Transposition $((X)')$ und Inversion $((X)^{-1})$ dieselbe Matrix hervor, d. h. es ist

$$(X^{-1})=(X)^{-1}=(X)'.$$

Man erkennt auch — dieser Umstand spielt im folgenden eine wichtige Rolle — daß für $X \neq E$ alle Diagonalelemente der entsprechenden Matrix (X) gleich Null sind, da stets $PX \neq P$ ist.

Man ordnet endlich jeder Klasse $\mathfrak{C}_p$ eine Matrix vermöge der folgenden Vorschrift zu: Besteht $\mathfrak{C}_p$ aus den Elementen $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$, so sei die zu $\mathfrak{C}_p$ gehörende Matrix

$$(\mathfrak{C}_p) = (c^{(p)}_{P,Q}) = (A_1) + (A_2) + \ldots + (A_{n_p}), \qquad (p = 1, 2, \ldots, h)$$

d. h. es sei

$$c^{(p)}_{P,Q} = \delta_{PA_1,\,Q} + \delta_{PA_2,\,Q} + \ldots + \delta_{PA_{n_p},\,Q}.$$

Alsdann gelten offenbar die folgenden Tatsachen:

1^0 der Klasse $\mathfrak{C}_1$ ist die Einheitsmatrix zugeordnet: $(\mathfrak{C}_1) = (E)$;

2^0 jeder anderen Klasse $(\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots, \mathfrak{C}_h)$ ist eine solche Matrix zugeordnet, deren Diagonalelemente $= 0$ sind;

3^0 sind $\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_{p'}$ inverse Klassen, so ist

$$(\mathfrak{C}_{p'}) = (A_1^{-1}) + (A_2^{-1}) + \ldots + (A_{n_p}^{-1}) = (A_1)' + (A_2)' + \ldots + (A_{n_p})' = (\mathfrak{C}_p)',$$

d. h. *es entsprechen inversen Klassen transponierte Matrizen;*

4^0 *es gelten die Matrizengleichungen*

$$(1') \qquad (\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta) = (\mathfrak{C}_\beta)(\mathfrak{C}_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{C}_\gamma) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h).$$

2. Die letzten Beziehungen zeigen, daß die Matrizen $(\mathfrak{C}_1)$, $(\mathfrak{C}_2), \ldots, (\mathfrak{C}_h)$ vertauschbar sind, ferner — mit Rücksicht auf 3^0 — daß jede dieser Matrizen mit ihrer Transponierten vertauschbar ist, d. h. daß *diese Matrizen vertauschbare reelle Normalmatrizen sind.* Der Satz über die simultane Hauptachsentransformation vertauschbarer Hermiteschen Formen lehrt[3]) die Existenz einer solchen unitär-orthogonalen Matrix (U), daß alle Matrizen $(U)^{-1}(\mathfrak{C}_p)(U) = (\varDelta_p)$ Diagonalmatrizen, d. h. Matrizen von der Form

$$(\varDelta_p) = \begin{pmatrix} r_p^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & r_p^{(2)} & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & r_p^{(n)} \end{pmatrix} \qquad p = 1, 2, \ldots, h$$

werden. Die aus (1) entstehenden Matrixrelationen

$$(\varDelta_\alpha)(\varDelta_\beta) = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma}(\varDelta_\gamma)$$

[3]) durch Anwendung dieses Satzes auf die „Hermiteschen Komponenten" $(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)'$ und $i(\mathfrak{C}_p) - i(\mathfrak{C}_p)'$ der Matrizen $(\mathfrak{C}_p)$.

liefern unmittelbar (für $k=1, 2, \ldots, n$) die folgenden Gleichungen (*Gleichungssystem von* FROBENIUS)

$$(\mathrm{I}) \qquad r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h),$$

d. h. jedes der n Größensysteme

$$(\mathrm{R}) \qquad r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

genügt bei Multiplikation zweier Größen einem Gleichungssystem, das von derselben Bauart ist, wie die Gleichungen (1) der Klassenkomposition.

Sind $\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_{p'}$ inverse Klassen, so folgt aus der Realität der entsprechenden Matrizen, und aus $(\mathfrak{C}_{p'}) = (\mathfrak{C}_p)'$, daß[4])

$$(\overline{\Delta}_p) = (\overline{\Delta}_p)' = (U)^{-1} (\mathfrak{C}_p)' (U) = (\Delta_{p'}),$$

d. h. es ist bei jedem $k=1, 2, \ldots, n$

$$(2) \qquad \bar{r}_p^{(k)} = r_{p'}^{(k)}.$$

Die Spuren der Matrizen (Δ_p), d. h. die Summen

$$r_p^{(1)} + r_p^{(2)} + \ldots + r_p^{(n)} \qquad (p=1, 2, \ldots, h)$$

stimmen mit den Spuren der äquivalenten Matrizen $(\mathfrak{C}_p)$ überein. Ist daher $p=1$ (d. h. $(\mathfrak{C}_p)=(E)$), so ist jene Summe $=n$, in allen anderen Fällen ist sie aber gleich Null, da — wie bemerkt — alle Diagonalelemente dieser $(\mathfrak{C}_p)$ verschwinden. Summiert man daher die Gleichungen (I) über k, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{n} r_\alpha^{(k)} r_\beta^{(k)} = c_{\alpha\beta 1}\, n,$$

d. h. die links stehende Summe ist, *falls $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ inverse Klassen sind, gleich $n_\alpha n = n_\beta n$, im entgegengesetzten Falle aber gleich Null.* Man kann diese Tatsache, mit Rücksicht auf (2), folgendermaßen schreiben:

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} r_\alpha \bar{r}_\beta^{(k)} = \begin{cases} n n_\alpha & \text{für} \quad \alpha = \beta, \\ 0 & \text{für} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

3. Es ist für das Folgende von entscheidender Bedeutung, daß unter den *Wertsystemen* (R) *genau h verschiedene Wertsysteme*

[4]) Die zu einer Grösse x konjugiert komplexe Zahl bezeichnen wir stets mit $\bar{x}$; in gleicher Weise bedeutet $(\overline{M})$ diejenige Matrix, die man erhält, wenn man in der Matrix (M) alle Elemente durch die konjugiert komplexen Größen ersetzt. Für eine unitär-orthogonale Matrix (U) ist daher $(U)^{-1} = (\overline{U})'$.

vorkommen. Wir wollen *erstens* zeigen, daß die Anzahl *h' der verschiedenen Wertsysteme* (R) nicht größer als die Anzahl h der Klassen in der vorgelegten Gruppe sein kann.[5]) In der Tat, man kann in mannigfacher Weise solche Größen $u_1, u_2, \ldots, u_h$ finden, daß die n Ausdrücke

$$r_1^{(k)} u_1 + r_2^{(k)} u_2 + \ldots + r_h^{(k)} u_h = r^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

h' verschiedene Werte liefern. Aus den Gleichungen (I) folgt nun unmittelbar

$$r_\alpha^{(k)} \sum_{\beta=1}^{h} u_\beta r_\beta^{(k)} = \sum_{\beta, \gamma=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h),$$

oder — wenn man zur Abkürzung

$$d_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^{h} c_{\alpha\beta\gamma} u_\beta \qquad (\alpha, \gamma = 1, 2, \ldots, h)$$

einführt —

$$r^{(k)} r_\alpha^{(k)} = \sum_{\gamma=1}^{h} d_{\alpha\gamma} r_\gamma^{(k)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, h).$$

Für jedes k fasse man diese Gleichungen als lineares homogenes Gleichungssystem in den Unbekannten[6]) $r_1^{(k)} = 1, r_2^{(k)}, \ldots, r_h^{(k)}$ auf; man erhält auf diese Weise für $r^{(k)}$ die Gleichung h-ten Grades

$$\begin{vmatrix} d_{11} - r^{(k)} & d_{12} & \ldots & d_{1h} \\ d_{21} & d_{22} - r^{(k)} & \ldots & d_{2h} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ d_{h1} & d_{h2} & \ldots & d_{hh} - r^{(k)} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die $d_{\alpha\gamma}$ — d. h. die Koeffizienten dieser Gleichung — für jedes k dieselben sind, so folgt, daß $r^{(k)}$ nicht mehr als h verschiedene Werte annehmen kann, d. h. es ist $h' \leqq h$.

Um *zweitens* $h' \geqq h$ zu beweisen, ist es zweckmäßig die folgenden Bezeichnungen einzuführen. Wir bezeichnen die *h' verschiedene* Wertsysteme in (R) mit

(P) $$\varrho_1^{(\varkappa)}, \varrho_2^{(\varkappa)}, \ldots, \varrho_h^{(\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, h')$$

und es möge das $\varkappa$-te dieser Wertsysteme genau $f_\varkappa$-mal auftreten,

---

[5]) Vgl. den analogen Beweis bei HILBERT, Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Größen, *Göttinger Nachrichten*, 1896, S. 179—183.

[6]) Da nämlich $(\mathfrak{C}_1) = (E)$ ist, so ist auch $(\Delta_1) = E$; also $r_1^{(k)} = 1$.

wenn man alle Wertsysteme (R) aufschreibt. Die Beziehungen (3) gehen dann in die Gleichungen

$$(3')\qquad \sum_{\varkappa=1}^{h'} f_\varkappa\, \varrho_\alpha^{(\varkappa)} \bar{\varrho}_\beta^{(\varkappa)} = \begin{cases} n n_\alpha, & \text{für } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

über, die man auch in der Form

$$(4)\qquad \sum_{\varkappa=1}^{h'} \sqrt{\frac{f_\varkappa}{n n_\alpha}}\, \varrho_\alpha^{(\varkappa)} \sqrt{\frac{f_\varkappa}{n n_\beta}}\, \bar{\varrho}_\beta^{(\varkappa)} = \delta_{\alpha\beta}$$

schreiben kann. Diese Beziehungen sagen aus, daß die folgende aus h' Zeilen und h Kolonnen bestehende Matrix

$$(M) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{f_1}{n n_1}}\, \varrho_1^{(1)} & \sqrt{\frac{f_1}{n n_2}}\, \varrho_2^{(1)} & \dots & \sqrt{\frac{f_1}{n n_h}}\, \varrho_h^{(1)} \\ \sqrt{\frac{f_2}{n n_1}}\, \varrho_1^{(2)} & \sqrt{\frac{f_2}{n n_2}}\, \varrho_2^{(2)} & \dots & \sqrt{\frac{f_2}{n n_h}}\, \varrho_h^{(2)} \\ \dots & \dots & & \\ \sqrt{\frac{f_{h'}}{n n_1}}\, \varrho_1^{(h')} & \sqrt{\frac{f_{h'}}{n n_2}}\, \varrho_2^{(h')} & \dots & \sqrt{\frac{f_{h'}}{n n_h}}\, \varrho_h^{(h')} \end{pmatrix}$$

„kolonnenweise“ die Orthogonalitätsrelation erfüllt. Daraus folgt aber unmittelbar, daß die h Wertsysteme (mit h' Komponenten), die in den einzelnen Kolonnen stehen, linear unabhängig sind, da ja auf einander senkrecht stehende Vektoren stets linear unabhängig sind. Da es ferner bei Wertsystemen mit h' Komponenten nicht mehr als h' linear unabhängige geben kann, so folgt in der Tat $h \leqq h'$, womit unsere Behauptung $h = h'$ bewiesen ist.

Insbesondere ist daher die obige Matrix (M) eine *quadratische* Matrix, welche kolonnenweise die Orthogonalitätseigenschaft erfüllt. Sie ist daher eine *unitär-orthogonale Matrix* und es gilt die entsprechende Eigenschaft der Zeilen, d. h. es ist

$$(4')\qquad \sum_{k=1}^{h} \sqrt{\frac{f_a}{n n_k}}\, \varrho_k^{(a)} \sqrt{\frac{f_b}{n n_k}}\, \bar{\varrho}_k^{(b)} = \delta_{ab}.$$

4. Man gelangt zu den FROBENIUSschen Gruppencharakteren durch den Ansatz

$$\chi^{(k)}(\mathfrak{C}_p) = \chi_p^{(k)} = \frac{\sqrt{f_k}}{n_p}\, \varrho_p^{(k)}, \qquad (k, p = 1, 2, \dots, h),$$

wodurch für jedes k eine Klassenfunktion in der Gruppe definiert ist. Führt man diese Größen in die Gleichungen (1), (2), (4) und (4′) ein, so erhält man die fundamentalen Eigenschaften der Gruppencharaktere. Insbesondere liefert die Orthogonalität der auf diese Weise aus (M) entstehenden quadratischen Matrix (deren k-te Zeile also

$$\left(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\chi_1^{(k)}\ \sqrt{\frac{n_2}{n}}\chi_2^{(k)}\ \ldots\ \sqrt{\frac{n_k}{n}}\chi_k^{(k)}\right)$$

ist) die bekannten Orthogonalitäts- und Vollständigkeitseigenschaften der Gruppencharaktere.

§. 2. Über Gruppencharaktere von gewissen unendlichen Gruppen.

5. Wir betrachten jetzt eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die aus abzählbar unendlich vielen Elementen $(A, B, \ldots, P, Q, \ldots)$ besteht; E sei stets das Einheitselement. Wir nehmen ferner an, daß *jede Klasse* (d. h. jede Gesamtheit von konjugierten Elementen) *nur aus endlich vielen Elementen besteht;* es seien $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_p, \ldots$ die unendlich vielen Klassen, $\mathfrak{C}_p$ enthalte n_p Gruppenelemente und es sei $\mathfrak{C}_1$ die Klasse, die aus dem Einheitselement allein besteht $(n_1 = 1)$.

Das Gesetz der *Klassenkomposition* ergibt sich genau in derselben Weise, wie bei endlichen Gruppen. Da nämlich die beiden Komplexe $X\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_p X$ (wo X ein beliebiges Gruppenelement bezeichnet) übereinstimmen, so folgt, daß der Komplex $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$, gebildet aus den Produkten der Elemente von $\mathfrak{C}_\alpha$ in Elemente von $\mathfrak{C}_\beta$, mit dem Komplex $\mathfrak{C}_\beta\mathfrak{C}_\alpha$ übereinstimmt, wobei man, (wie bei endlichen Gruppen) ein Element dieses Komplexes, das bei der angedeuteten Komposition k-mal auftritt, k-fach rechnet. Ist etwa

$$C = A_1B_1 = A_2B_2 = \ldots = A_kB_k,$$

wobei $A_1, A_2, \ldots, A_k$ der Klasse $\mathfrak{C}_\alpha$—, $B_1, B_2, \ldots, B_k$ der Klasse $\mathfrak{C}_\beta$ angehören, so folgt aus

$$X^{-1}CX = (X^{-1}A_pX)(X^{-1}B_pX) \qquad (p = 1, 2, \ldots, k),$$

daß $X^{-1}CX$ mindestens so oft bei jener Klassenmultiplikation auftritt, wie C. Daraus folgt aber unmittelbar (indem man die Rolle der beiden konjugierten Elemente C und $X^{-1}CX$ vertauscht), daß alle Elemente irgendeiner Klasse $\mathfrak{C}_\gamma$ bei der Klassenkomposition $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$ gleich oft auftreten. Wir bezeichnen diese Anzahl mit $c_{\alpha\beta\gamma}$; da ferner — zufolge unserer Annahme — $\mathfrak{C}_\alpha\mathfrak{C}_\beta$ nur aus endlichvielen Elementen besteht, so ist $c_{\alpha\beta\gamma}$ bei gegebenen α und β nur für endlich viele γ von Null verschieden. Wir erhalten auf diese

Weise wiederum die symbolischen Gleichungen der Klassenkomposition

$$\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma}\, \mathfrak{C}_\gamma, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3 \ldots),$$

wo natürlich $c_{\alpha\beta\gamma} = 0$ gesetzt ist, falls die Elemente der Klasse $\mathfrak{C}_\gamma$ im Komplex $\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta$ nicht vorkommen. Der Begriff der inversen Klassen ist derselbe, wie bei endlichen Gruppen und es gilt (wörtlich wie dort)

$$c_{\alpha\beta 1} = \begin{cases} n_\alpha = n_\beta, & \text{oder} \\ 0 & \end{cases}$$

je nachdem $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ inverse Klassen sind oder nicht.

6. Wir ordnen — in analoger Weise, wie dies im vorangehenden §-en für endliche Gruppen geschah — jedem Gruppenelement X eine unendliche (reelle) orthogonale Matrix (X) vermöge der folgenden Vorschrift zu: wir setzen

$$a_{P,Q}^{(X)} = \delta_{PX,Q}$$

und definieren

$$(X) = (a_{P,Q}^{(X)}) = \begin{vmatrix} a_{A,A}^{(X)} & a_{A,B}^{(X)}, & a_{A,C}^{(X)}, & \ldots \\ a_{B,A}^{(X)} & a_{B,B}^{(X)}, & a_{B,C}^{(X)}, & \ldots \\ a_{C,A}^{(X)} & a_{C,B}^{(X)}, & a_{C,C}^{(X)}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \end{vmatrix};$$

dabei sind die Elemente der vorgelegten Gruppe zur Numerierung der Zeilen und Kolonnen benutzt. Wenn man in entsprechender Weise Unbestimmte $x_A, x_B, x_C, \ldots$ bzw. $y_A, y_B, y_C, \ldots$ einführt, so lautet die zu (X) gehörende Bilinearform von unendlich vielen Veränderlichen

$$X(x, y) = \sum_{(P,Q)} a_{P,Q}^{(X)} x_P y_Q.$$

(X) ist offenbar eine orthogonale (also beschränkte) Matrix, da ja

$$\sum_{(K)} a_{P,K}^{(X)} a_{Q,K}^{(X)} = \sum_{(K)} a_{K,P}^{(X)} a_{K,Q}^{(X)} = \delta_{P,Q}$$

ist.

Dem Einheitselement E entspricht natürlich die Einheitsmatrix $(E) = (\delta_{P,Q})$, und es lehrt die Beziehung

$$(X)(Y) = \Big(\sum_{(K)} a_{P,K}^{(X)} a_{K,Q}^{(Y)}\Big) = \Big(\sum_{(K)} \delta_{PX,K}\, \delta_{KY,Q}\Big) =$$
$$= (\delta_{PXY,Q}) = (a_{P,Q}^{(XY)}) = (XY),$$

daß die Matrizen
$$(A), (B), (C), \ldots$$
eine isomorphe Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ liefern. Aus der Orthogonalität dieser Matrizen folgt, daß zu inversen Gruppenelementen inverse, d. h. transponierte Matrizen gehören:

$$(6) \qquad (X^{-1}) = (X)^{-1} = (X)';$$

ferner sind für jedes $X \neq E$ alle Diagonalelemente der entsprechenden Matrix (X) gleich Null.

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_{n_p}$ die Elemente der Klasse $\mathfrak{C}_p$, so ordnen wir dieser Klasse die Matrix

$$(7) \qquad (\mathfrak{C}_p) = (A_1) + (A_2) + \ldots + (A_{n_p}) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu, die also aus den Elementen
$$c^{(p)}_{P,Q} = \delta_{PA_1,Q} + \delta_{PA_2,Q} + \ldots + \delta_{PA_{n_p},Q}$$
gebildet ist. Die Gleichungen (5) der Klassenkomposition gehen alsdann in die folgenden Matrizengleichungen über:

$$(5') \qquad (\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta) = (\mathfrak{C}_\beta)(\mathfrak{C}_\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma}(\mathfrak{C}_\gamma) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots),$$

woraus die Vertauschbarkeit dieser Matrizen gefolgert werden kann. Da ferner wegen (6) der inversen Klasse $\mathfrak{C}_{p'}$ von $\mathfrak{C}_p$ die Matrix
$$(\mathfrak{C}_{p'}) = (A_1^{-1}) + (A_2^{-1}) + \ldots + (A_{n_p}^{-1}) = (A_1)' + (A_2)' + \ldots + (A_{n_p})' = (\mathfrak{C}_p)'$$
zugeordnet ist, so ergibt sich insbesondere, daß *jede der reellen Matrizen* (7) *mit ihrer Transponierten vertauschbar ist,* d. h. *die Gesamtheit der den Klassen zugeordneten Matrizen ist eine abzählbare Menge von untereinander vertauschbaren (reellen) Normalmatrizen.* Daher sind die sogenannten HERMITEschen Komponenten der Matrizen (7), d. h. die Matrizen
$$(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)' \quad \text{und} \quad i((\mathfrak{C}_p)' - (\mathfrak{C}_p)) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$
ebenfalls vertauschbar, und man erkennt unmittelbar, daß $(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)'$ eine reell-symmetrische, $i((\mathfrak{C}_p)' - (\mathfrak{C}_p))$ aber eine HERMITEsche Matrix ist.

7. Für eine abzählbare Menge von vertauschbaren HERMITEschen Matrizen
$$(M_p) = (m^{(p)}_{P,Q}) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$
bzw. für die zugehörigen HERMITEschen Formen
$$M_p(x, y) = \sum_{(P,Q)} m^{(p)}_{P,Q}\, x_P\, y_Q$$

gilt aber der folgende Satz, den ich in Anlehnung an gewisse Untersuchungen von Herrn J. v. Neumann in meiner Abhandlung „Über die Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme“ [7]) bewiesen habe.

Es gibt zu den vorgelegten vertauschbaren Hermiteschen Formen eine Schar von Hermiteschen Einzelformen

$$\sigma(\mu; x, y) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\mu)\, x_P\, y_Q \qquad (0 \leqq \mu \leqq 1) \tag{8}$$

mit den folgenden Eigenschaften

α) es gelten für alle $0 \leqq \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq 1$ die Matrizengleichungen

$$(\sigma_{P,Q}(\mu_1))\,(\sigma_{P,Q}(\mu_2)) = (\sigma_{P,Q}(\mu_2))\,(\mu_{P,Q}(\mu_1)) = (\sigma_{P,Q}(\mu_1))\,;$$

β) ist x_P ein beliebiges Wertsystem der Unbestimmten, für das die unendliche Summe $\sum_{(P)} |x_P|^2$ konvergent ist, so ist die (wegen $\sigma_{P,Q}(\mu) = \overline{\sigma_{Q,P}}(\mu)$ jedenfalls reelle) Funktion von μ

$$\sigma(\mu; x, \overline{x}) = \sum_{(P,Q)} \sigma_{P,Q}(\mu)\, x_P\, \overline{x}_Q$$

eine nicht abnehmende, an jeder inneren Stelle des Intervalls $0 \leqq \mu \leqq 1$ von links stetige Funktion von μ, welche außerdem den Gleichungen $\sigma(0; x, \overline{x}) = 0$, $\sigma(1; x, \overline{x}) = \sum_{(P)} |x_P|^2$ genügt. Ein offenes Intervall, in dem alle $\sigma_{P,Q}(\mu)$ konstant sind, wird als Konstanzintervall der obigen Spektralform (8) bezeichnet. Es gibt ferner ein System von reellen, im Intervall $0 \leqq \mu \leqq 1$ definierten Funktionen $f_1(\mu), f_2(\mu), \ldots$ von der Beschaffenheit, daß jede dieser Funktionen im betrachteten Intervall überall stetig ist mit etwaiger Ausnahme der obigen Konstanzintervalle, wo sie einen endlichen Sprung erleiden kann; man kann ferner diese Funktionen derart normieren, daß, falls (α, β) ein solches Konstanzintervall bedeutet,

$$\text{für} \quad \alpha \leqq \mu \leqq \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad f_p(\mu) = f_p(\alpha) -,$$

$$\text{für} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} < \mu \leqq \beta \qquad f_p(\mu) = f_p(\beta) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

sei.

Mit Hilfe der Spektralform (8) und dieser Funktionen $f_p(\mu)$ gilt für die vorgelegten Hermiteschen Formen die folgende *simultane Darstellung:*

---

[7]) *Mathematische Zeitschrift*, **31** (1930), S. 769—798; siehe insbesondere S. 781—792.

$$M_p(x, y) = \int_0^1 f_p(u)\, d\sigma(u; x, y) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wendet man diesen Satz auf die vertauschbaren HERMITEschen Formen $(\mathfrak{C}_p) + (\mathfrak{C}_p)'$ und $i((\mathfrak{C}_p)' - (\mathfrak{C}_p))$ an, so gelangt man (durch Addition) zur simultanen Darstellung der Matrizen $(\mathfrak{C}_p)$ bzw. der zugehörigen Bilinearformen von unendlich vielen Veränderlichen

$$\mathfrak{C}_p(x, y) = \sum_{(P, Q)} c^{(p)}_{P, Q} x_P y_Q = \int_0^1 \chi_p(u)\, d\sigma(u; x, y) \quad (p = 1, 2, 3, \ldots);$$

die hier auftretenden Funktionen $\chi_p(u)$ besitzen dieselben Eigenschaften, wie die $f_p(u)$.

8. Die (komplexwertigen) Funktionen $\chi_p(u)$, die bzw. den Klassen $\mathfrak{C}_p$ auf diese Weise zugeordnet erscheinen, spielen bei unendlichen Gruppen von der hier behandelten Art eine ähnliche Rolle, wie die Gruppencharaktere im Falle einer endlichen Gruppe. Wir sind ja zu diesen in analoger Weise gelangt, wie im vorigen §-en zu den Gruppencharakteren; wir wollen noch die Haupteigenschaften dieser $\chi_p(u)$ darlegen, in denen wir eine sinngemäße Übertragung der für die Charaktere einer endlichen Gruppe geltenden Beziehungen erkennen werden.

Man folgert diese Beziehungen aus der folgenden Bemerkung:[8]) ist $u(u)$ eine beliebige Funktion, welche mit etwaiger Ausnahme der Mittelpunkte der Konstanzintervalle von $\sigma(u; x, y)$ überall stetig ist und welche bei jedem Wertsystem der Unbestimmten x_P, y_Q die Beziehung

$$\int_0^1 u(u)\, d\sigma(u; x, y) = 0$$

erfüllt, so ist an jeder Stelle außerhalb der Konstanzintervalle $u(u) = 0$.

Aus dieser Bemerkung kann *erstens* gefolgert werden, daß *wenn* $\mathfrak{C}_p$ *und* $\mathfrak{C}_{p'}$ *inverse Klassen sind, für jedes* u *im Intervall* (0, 1)

$$\overline{\chi_p(u)} = \chi_{p'}(u) \tag{9}$$

sein muß. In der Tat, da $(\mathfrak{C}_p)$ und $(\mathfrak{C}_{p'})$ transponierte Matrizen sind, so ist $c^{(p)}_{P,Q} = c^{(p')}_{Q,P}$; man erhält daher, wenn man die Realität

8) vgl. a. a. O. [1]), S. 145.

der Matrizen $(\mathfrak{C}_p)$ und den HERMITEschen Charakter von $\sigma(\mu; x, y)$ beachtet,

$$c_{P,Q}^{(p')} = c_{Q,P}^{(p)} = \int_0^1 \overline{\chi_p(\mu)}\, d\sigma_{Q,P}(\mu) = \int_0^1 \overline{\chi_p(\mu)}\, d\sigma_{P,Q}(\mu),$$

folglich

$$\mathfrak{C}_{p'}(x, y) = \int_0^1 \overline{\chi_p(\mu)}\, d\sigma(\mu; x, y) = \int_0^1 \chi_{p'}(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y).$$

Daraus folgt aber — nach der vorangehenden Bemerkung — die Richtigkeit der Gleichung (9) für jede Stelle μ, die nicht innerhalb eines Konstanzintervalls liegt. Man erkennt ferner, daß diese Beziehung auch dann richtig bleibt, wenn μ innerhalb eines Konstanzintervalls liegt, da an jeder inneren Stelle eines Konstanzintervalls der Wert aller auftretenden Funktion $\chi_p(\mu)$ gleich dem Werte dieser Funktion an dem einen Endpunkt des Intervalls ist, für den die Beziehung bereits bewiesen ist.

Wir zeigen *zweitens*, daß *die Funktionen* $\chi_p(\mu)$ (für jedes μ) *den unendlich vielen Gleichungen*

$$(10) \qquad \chi_\alpha(\mu)\, \chi_\beta(\mu) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma}\, \chi_\gamma(\mu) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen. Denn es folgt aus der Eigenschaft α) der Spektralform (die mit der sogenannten HILBERTschen Vollständigkeitsrelation äquivalent ist) in wohlbekannter Weise[9]) für die Produktmatrix $(\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta)$ die Darstellung

$$(\mathfrak{C}_\alpha)(\mathfrak{C}_\beta) = \left(\int_0^1 \chi_\alpha(\mu)\, \chi_\beta(\mu)\, d\sigma_{P,Q}(\mu) \right);$$

es liefern daher die Matrixgleichungen (5′) die Beziehungen

$$\int_0^1 \chi_\alpha(\mu)\, \chi_\beta(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y) = \int_0^1 \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma}\, \chi_\gamma(\mu)\, d\sigma(\mu; x, y),$$

woraus die obigen Gleichungen (10) auf Grund der oben gemachten Bemerkung unmittelbar folgen.

Wir erhalten *drittens* die für die $\chi_p(\mu)$ gültigen *Orthogonalitätsrelationen* in der folgenden Weise. Wie oben bemerkt, verschwinden für $p = 2, 3, \ldots$ alle Diagonalelemente der Matrix $(\mathfrak{C}_p)$ ($(\mathfrak{C}_1)$ ist die Einheitsmatrix). Daher ist jedenfalls

---

9) vgl. a. a. O. 7), S. 793.

$$\int_0^1 \chi_p(\mu)\, d\sigma_{A,A}(\mu) = 0 \qquad (p = 2, 3, \ldots),$$

während natürlich

$$\int_0^1 \chi_1(\mu)\, d\sigma_{A,A}(\mu) = 1$$

ist ($\chi_1(\mu) = 1$). Man erhält daher aus den Gleichungen (10) durch Integration

$$\int_0^1 \chi_\alpha(\mu)\,\chi_\beta(\mu)\, d\sigma_{A,A}(\mu) = c_{\alpha\beta 1} = \begin{cases} n_\alpha = n_\beta, & \text{oder} \\ 0, \end{cases}$$

je nachdem $\mathfrak{C}_\alpha$ und $\mathfrak{C}_\beta$ inverse Klassen sind oder nicht. Man kann diese Relationen mit Rücksicht auf die Beziehung (9) in die folgende Form schreiben:

$$\int_0^1 \frac{\chi_\alpha(\mu)}{\sqrt{n_\alpha}}\, \overline{\frac{\chi_\beta(\mu)}{\sqrt{n_\beta}}}\, d\sigma_{A,A}(\mu) = \delta_{\alpha\beta},$$

d. h. *die Funktionen*

$$\frac{\chi_p(\mu)}{\sqrt{n_p}} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

bilden im Bezug auf $\sigma_{A,A}(\mu)$ *ein unitär-orthogonales Funktionensystem.*

Diese Orthogonalitätseigenschaften gelten im Bezug auf alle $\sigma_{A,A}$, $\sigma_{B,B}$, $\sigma_{C,C}, \ldots$; im Falle der kommutativen Gruppen bewies ich, daß diese Funktionen übereinstimmen, was im vorliegenden allgemeinen Falle nicht zu erwarten ist.

Das Ergebnis dieses §-en können wir folgendermassen zusammenfassen:

Es sei $\mathfrak{G}$ *eine aus abzählbar unendlich vielen Elementen bestehende Gruppe von der Beschaffenheit, daß jede Klasse* ($\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3, \ldots$) *von konjugierten Gruppenelementen aus endlich vielen Elementen besteht, und es seien*

$$\mathfrak{C}_\alpha \mathfrak{C}_\beta = \mathfrak{C}_\beta \mathfrak{C}_\alpha = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma} \mathfrak{C}_\gamma \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Gleichungen der Klassenkomposition; unter diesen Voraussetzungen kann man den obigen Klassen ein System von (im Intervall $0 \leq \mu \leq 1$ *definierten) Funktionen*

$$\chi_1(\mu),\ \chi_2(\mu),\ \chi_3(\mu), \ldots$$

zuordnen, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. *diese Funktionen sind überall stetig mit etwaiger Ausnahme von gewissen Stellen, wo sie einen endlichen Sprung erleiden;*

2. *sind $\mathfrak{C}_p$ und $\mathfrak{C}_{p'}$ inverse Klassen, so gilt für alle μ*

$$\bar{\chi}_p(\mu) = \chi_{p'}(\mu);$$

3. *es gelten die unendlich vielen Gleichungen:*

$$\chi_\alpha(\mu)\,\chi_\beta(\mu) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{\alpha\beta\gamma}\,\chi_\gamma(\mu) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots);$$

4. *es gelten im Bezug auf geeignet gewählte Funktionen $\sigma_{A,A}(\mu)$ die Orthogonalitätsrelationen;*

$$\int_0^1 \frac{\chi_\alpha(\mu)}{\sqrt{n_\alpha}} \frac{\bar{\chi}_\beta(\mu)}{\sqrt{n_\beta}}\, d\sigma_{A,A}(\mu) = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots)$$

wobei n_p die Anzahl der in $\mathfrak{C}_p$ enthaltenen Elementen bedeutet.

(*Eingegangen am 11. November 1931.*)